

LA OPCIÓN CAS DE GEOGEBRA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

THE CAS OPTION OF GEOGEBRA IN THE TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS

M.Sc. Mario Rafael Estrada Doallo
mestradad@uho.edu.cu
<https://orcid.org/0000-0001-6246-4415>
Universidad de Holguín, Cuba

M.Sc. Ariel Hernández Hernández
arielhh@uho.edu.cu
<https://orcid.org/0000-0003-2938-0556>
Universidad de Holguín, Cuba

M.Sc. Diógenes Feliciano González Hernández
feliciano.gh@uho.edu.cu
<https://orcid.org/0000-0002-0656-8137>
Universidad de Holguín, Cuba

Tipo de contribución: Artículo de investigación científica

Recibido: 15-05-2022

Aceptado para su publicación: 10-09-2022

Resumen: El GeoGebra es muy utilizado en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. De las tareas investigativas del Departamento de Licenciatura en Matemática se pudo apreciar que se le da importancia al uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) desde los problemas del profesional, hasta los objetivos de las disciplinas. Lo anteriormente expuesto arrojó como problema principal que no existen precisiones de cómo usar las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cada disciplina. Se recogen algunos de los resultados obtenidos, donde se muestra cómo se usó el GeoGebra, a través de la opción CAS. Cómo métodos y técnicas utilizadas, se encuentran, la observación, la encuesta y la entrevista que permitieron constatar la situación sobre el empleo y uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Además, se emplearon el histórico - lógico y análisis - síntesis, los que permitieron hacer una valoración de las tendencias en el mundo del uso de la tecnología en la enseñanza y se logró la elaboración de las situaciones de aprendizaje a utilizar.

Palabras clave: Matemática Dinámica; Asistentes Matemáticos; Situaciones de Aprendizaje

Abstract: GeoGebra is widely used in teaching and learning mathematics. From the investigative tasks of the Department of Bachelor of Mathematics, it was possible to appreciate that importance is given to the use of Information and Communication Technologies (ICT) from the problems of the professional, to the objectives of the disciplines. The above mentioned showed as the main problem that there are no details on how to use ICT in the teaching and learning process of each discipline. Some of the results obtained are collected, where it is shown how GeoGebra was used, through the CAS option. How methods and techniques used, are, observation, survey and interview that allowed verifying the situation on the employment and use of mathematical assistants in the teaching and learning of mathematics. In addition, the historical - logical and analysis - synthesis were used, which allowed an assessment of the trends in the world of the use of technology in teaching and the elaboration of the learning situations to be used was achieved.

Keywords: Dynamic Mathematics; Mathematical Assistants; Situations Learning

1. INTRODUCCIÓN

La falta de motivación de los estudiantes hacia la matemática ha provocado un bajo aprovechamiento en el aprendizaje y por lo tanto los resultados académicos son deficientes en cada una de las educaciones. Esta situación pudiera estar dada por las limitaciones que presentan los estudiantes en la asimilación de los contenidos de matemática y por ello se buscan alternativas para mejorar su enseñanza y aprendizaje. El desarrollo de las tecnologías informáticas ha ganado espacio en la docencia y con las mismas se han obtenido resultados positivos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, por lo que se considera necesario su uso.

Las posibilidades didácticas que ofrecen las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) han suscitado nuevos enfoques metodológicos y conlleva un replanteo del acto de cómo enseñar y para lograr mejorar el rendimiento académico del estudiante con el uso de estos softwares se debe pensar bajo qué condiciones se aplica un software educativo, ya que más que de sus características técnicas, es importante la preparación y el uso didáctico que realice el docente. No es sólo instalar un software y presentar unos problemas; la utilización de estos recursos requiere un adecuado diseño que permita que el alumno asuma un rol activo en el proceso de enseñanza aprendizaje, desarrollando habilidades en la formación de los conocimientos objeto de estudio.

Por otro lado, la tecnología ha generado un espacio social y de aprendizaje que puede resultar excelente aliado del docente, puesto que proporciona instancias de producción que facilitan el acercamiento entre docentes y alumnos. Estos recursos pueden resultar una herramienta didáctica que facilita el proceso de enseñanza y aprendizaje por el impacto favorable que ocasiona en los alumnos. Su utilización permitirá que el estudiante asuma un rol activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje guiándolo hacia el desarrollo de habilidades para la formación de los conocimientos y la formación de un pensamiento visual.

Además, al considerar los resultados que brindan las diferentes investigaciones en el ámbito nacional e internacional (Barrena *et al.*, 2011; Carrillo de Albornoz, 2013; Abar y Cotic, 2015; Pimentel y Vieira, 2019; Pozas y Alves, 2019; Williner, Favieri y Scorso, 2020; Fabián y Rodríguez, 2020; Freyre y Cavatorta, 2021; Guachún y Poveda y García-Cuéllar, 2021) en el empleo de asistentes matemáticos que además de revolucionar el conocimiento matemático, tiene un gran impacto en el aprendizaje, motivado por el poder expresivo que brindan estos recursos, se hace

necesario estudiarlos, pues surgen interrogantes sobre qué se debe enseñar y aprender de los mismos dentro del currículo de Matemática, ya que en la matemática están presente tanto aspectos conceptuales, como aspectos computacionales, y el equilibrio que debe mantenerse entre ambos entra dentro de la dialéctica actual de dedicar más o menos tiempo en las tareas de cálculo y la resolución de problemas.

Se coincide con Paiva y Alves (2019) cuando plantean que el uso de recursos tecnológicos digitales en el contexto escolar constituye una línea de trabajo que necesita ser fortalecida, pues existe una distancia considerable entre los avances de los softwares educativos y la aceptación, comprensión y utilización de los mismos en las clases por los profesores, donde muchos de ellos siguen utilizando la metodología tradicional.

Dentro de los asistentes matemáticos más utilizados, en la docencia, se encuentran los programas de cálculo simbólico, *Mathematica*, *Maple* y *Derive*, entre otros, y los geométricos que permiten la manipulación directa y dinámica de la geometría como, por ejemplo: *Cabri Géométre II* y *Geometer's Sketchpad*. Sin embargo, en los últimos años, ha sido recurrente el uso del Programa de Matemática Dinámica (PMD) *GeoGebra* que combina el cálculo simbólico y el dinamismo, programa libre de fácil aprendizaje y de muchas posibilidades de aplicación en la docencia. El *GeoGebra* da pie a un tratamiento algebraico, analítico y geométrico, dinámicamente integrado.

Se está de acuerdo con que la experimentación puede ser definida como la etapa donde ocurre la aplicación de un cierto número de clases preparadas y analizadas previamente con la finalidad de observar situaciones de aprendizajes donde estén presentes los conceptos previstos en la investigación (Almouloud, 2007).

La experimentación permite al alumno probar o ensayar y valorar la facilidad de obtener muchos ejemplos sobre alguna situación para luego buscar similitudes, casos extremos o contraejemplos. La información obtenida de esta manera puede contribuir a enunciar alguna generalización que será luego necesario probar (Williner, Favieri y Scorso, 2020).

Los aspectos antes mencionados han sido corroborados por los autores a lo largo de su vida laboral, por una parte, en la enseñanza de la matemática en diferentes niveles e instituciones educativas y por otra, por su experiencia en la preparación académica y didáctica a los profesores de matemática.

Como parte de las tareas investigativas para la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, la revisión del Plan de Estudio E y de los diferentes programas de las disciplinas, se aprecia que se le da gran importancia al uso de las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje, desde los problemas del profesional donde se aborda la incorporación de diversos recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, hasta los objetivos generales de las disciplinas, donde se plantea de manera explícita el uso de las tecnologías de la información y comunicación, asistentes matemáticos y plataformas interactivas. Lo anteriormente expuesto arrojó como problema principal que no existen precisiones de cómo usar las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cada disciplina.

Se tuvo en cuenta lo analizado y a partir de la experiencia de los autores con el uso del PMD GeoGebra se pudo determinar que es posible usar este programa en las disciplinas de la carrera. El trabajo está dirigido a orientar a los docentes y estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática del Departamento de Licenciatura en Matemática el uso de la opción CAS del GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática y mostrar los resultados que se obtienen luego de usar la tecnología.

Para desarrollar el trabajo con la opción CAS del GeoGebra se siguió una estrategia didáctica que consta de cinco pasos, además no solo se trabajó con el GeoGebra, sino que se combinó el uso de la tecnología con la metodología tradicional a lo largo del curso, para ello se decidió y se escogió, para cada unidad didáctica, el tratamiento que se debía dar al contenido.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

El trabajo forma parte del proyecto de investigación: *Incidencia del pensamiento visual en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática universitaria de la Universidad Antonio Nariño de la ciudad de Bogotá, Colombia.*

Se asume un enfoque de investigación cualitativo, bajo un diseño de investigación acción. Este diseño "... constituye un proceso de reflexión – acción – cambio - reflexión, por y para el mejoramiento de la práctica del docente, mediante la participación activa de este, dirigido a superar los problemas y las necesidades del aula, la escuela y la comunidad, posibilitando el diálogo entre teoría-práctica-teoría" (Minerva, 2006). Este diseño en el contexto de la matemática debe lograr un ciclo de experimentación – retroalimentación - reflexión del conocimiento

matemático para suministrar las bases de la argumentación que ayude a explicar y a demostrar la conjetura hallada.

De los métodos y técnicas de investigación utilizados se encuentran los de carácter empíricos como la observación, la encuesta y la entrevista que permitieron constatar la situación sobre el empleo y uso de los asistentes matemáticos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en las carreras. Al mismo tiempo se emplearon métodos teóricos como el histórico – lógico y análisis – síntesis, los que permitieron hacer una valoración crítica de las tendencias en el mundo del uso de la tecnología en la enseñanza y propiciaron la elaboración de las situaciones de aprendizaje a utilizar en las disciplinas de las carreras. La investigación fue aplicada a los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática del Departamento de Licenciatura en Matemática, de la Universidad de Holguín.

La estrategia didáctica propuesta correspondió al diseño e implementación de un conjunto de situaciones de aprendizajes, de un análisis didáctico a priori basado en el diagnóstico del grupo de estudiantes, y la fase de acción, donde se diseñaron e implementaron estas situaciones, para fortalecer las habilidades matemáticas buscadas en los estudiantes. En concreto, para el trabajo con el GeoGebra se siguieron los siguientes pasos: Estudio y selección de los contenidos de la disciplina en los que se empleó el GeoGebra para su desarrollo; se tuvo en cuenta las diferencias individuales de los estudiantes para la elaboración de las situaciones de aprendizaje a desarrollar; se tuvieron presente las condiciones del laboratorio de computación; se planificaron las diferentes actividades que resolvió el estudiante ante el computador, con el objetivo de que estas sean lo más eficientes y efectivas posible y se llevó un registro individual donde se recogieron los avances y dificultades de cada estudiante.

Para las actividades investigativas desarrolladas se tuvo en cuenta el GeoGebra que es un software de matemáticas que reúne geometría, álgebra, estadística y cálculo, el cual es sin duda uno de los más conocidos y un software muy fácil de usar y que resulta ser una poderosa herramienta en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

De las ventajas que proporciona el trabajo con el GeoGebra, se pueden citar: Favorece la interiorización de los conceptos y procedimientos; desarrolla nuevas estrategias de razonamiento y propicia la investigación y el descubrimiento; facilita el trabajo autónomo del estudiante en la resolución de

problemas; la capacidad gráfica facilita la integración de diversas imágenes y gráficas en el plano y en el espacio que son obstáculos en el aprendizaje; su carácter interactivo provoca una retroalimentación inmediata; reducen el tiempo empleado en la representación gráfica de diferentes lugares geométricos permitiendo contribuir al desarrollo del pensamiento espacial del estudiante; facilita la aparición de contextos de trabajo colectivo, muy adecuados para el aprendizaje colaborativo.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en la formación de profesores, basados en actividades de aprendizaje, que en su resolución propicie hacer uso del GeoGebra y de la visualización matemática como una herramienta didáctica, permite la construcción robusta del contenido matemático en los estudiantes, pues propicia que el estudiante se apropie de los procesos de: manipulación, representación, transformación, exploración y modelación, entre otros.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La versión con la que se trabajó fue GeoGebra Classic 5.0.472.0-d, del 31 de mayo de 2018, la cual incluye nuevas mejoras con respecto a las versiones anteriores, lo que se corroborará con la opción CAS. Antes de mostrar algunos ejemplos de cómo es posible usar la opción CAS del GeoGebra, se mostrará cómo acceder a esta opción y una breve explicación de su uso. Al cargar el programa existen dos posibilidades de acceder al CAS, una es por medio de la pantalla principal donde en la parte derecha se muestran las apariencias que se pueden optar con esta versión de GeoGebra. La segunda opción de acceder al CAS es por medio del menú Vista o por el teclado con **Ctrl + Mayús + K** (Figura 1 y 2).

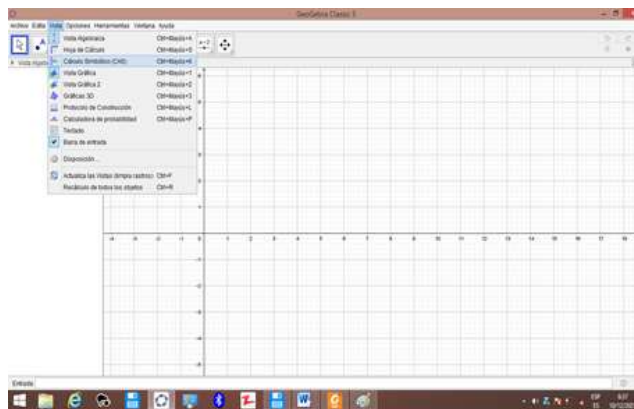
Luego de acceder a la opción, aparecerá en el boceto una barra de herramientas como las demás vistas del GeoGebra. La forma de trabajar con la vista CAS es similar a la utilizada en la mayoría de programas de cálculo simbólico. Todas las entradas aparecen numeradas de forma correlativa y a cada entrada corresponderá una expresión de salida o resultado.

Aquí se pueden realizar sencillas operaciones numéricas o simbólicas en esta vista, donde se obtienen los resultados de forma directa. Los tres primeros botones de la barra de herramientas, son las opciones necesarias para obtener un resultado en forma exacta, en forma aproximada o dejarlo sin realizar ninguna operación.

Se dispone de las opciones necesarias para facilitar la edición de cualquier expresión contenida en

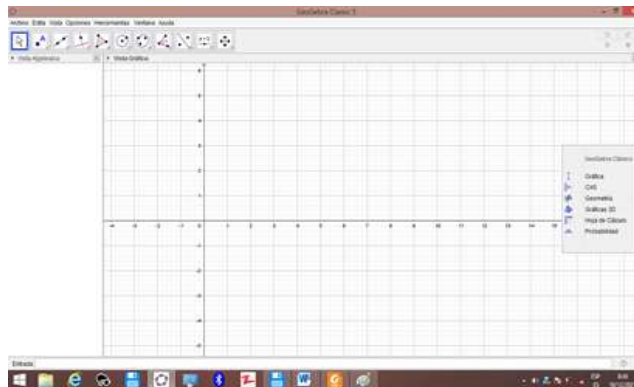
cualquiera de las filas, sin olvidar que se puede pulsar directamente sobre una expresión de entrada, para modificarla y, por tanto, para obtener los nuevos resultados.

Figura 1. Presentación de la opción CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Figura 2. Presentación de la opción CAS en GeoGebra



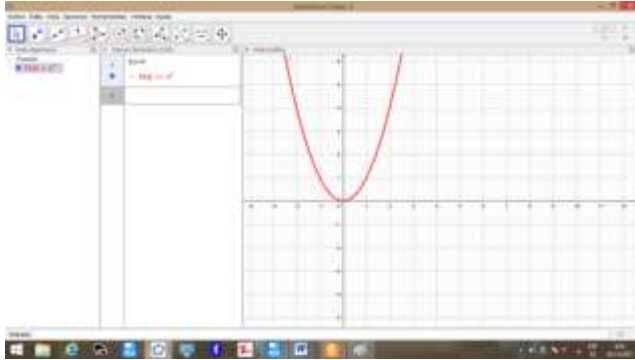
Fuente: Elaboración propia

Otra ventaja que tiene es que, las distintas vistas están relacionadas de manera que cualquier valor contenido en una de ellas se podrá utilizar en otra de las vistas disponibles en GeoGebra. Por ejemplo, si se escribe una expresión simbólica (cuya variable sea x) en la vista CAS, bastará con marcar el círculo (Ocultar/Mostrar) para obtener la definición de la función en la vista algebraica y su representación en la vista gráfica (Figura 3).

Las opciones y comandos que ofrece la incorporación del cálculo simbólico de GeoGebra, no solo resuelven las incidencias anteriores, sino que además amplían las posibilidades de GeoGebra, que permitirán su uso en otros bloques de contenidos; lo que hace que poco a poco GeoGebra se convierta en un recurso imprescindible y sobre todo casi único, para el

profesorado interesado en incorporar las TIC a su aula (Carrillo de Albornoz, 2013).

Figura 3. Representación de la una función en CAS de GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Las opciones que ofrece la vista CAS de GeoGebra permiten trabajar los siguientes contenidos: Factorización de números y polinomios, operaciones con fracciones algebraicas, resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, cálculo diferencial e integral, cálculo de límites, sumas y productos de series, simplificación de expresiones trigonométricas, vectores y matrices, resolución de ecuaciones diferenciales.

También, para realizar operaciones se puede definir los elementos simbólicos como deslizadores, para estudiar qué ocurre al cambiar su valor y de esta forma aprovechar las características dinámicas de GeoGebra, de modo que la manipulación de los objetos, algo habitual en GeoGebra, faciliten la experimentación y la investigación, para lo que este programa es uno de los mejores recursos que se pueden utilizar, sino el mejor, al menos para los que desde hace años están ilusionados con el uso de las TIC (Carrillo de Albornoz, 2013).

A continuación se muestran situaciones de aprendizajes donde se aplica la opción CAS del GeoGebra, la cual resulta novedosa, pues al compararla con otros asistentes matemáticos más poderosos como el Derive, el Maple o el Mathematica, se observa a favor de GeoGebra su característica de software libre. Además de la característica anterior hay que tener en cuenta que para ciertos niveles educativos más que potencia se requieren otras características como sencillez, intuición o dinamismo, por lo que GeoGebra es suficiente para el desarrollo de la mayoría de los contenidos (Carrillo de Albornoz, 2013).

De las opciones que ofrece la vista CAS de GeoGebra se muestran las relacionadas con resolución de

sistemas de ecuaciones y matrices, de la disciplina de Álgebra.

Situación de aprendizaje 1

Investiga la solución del sistema de ecuaciones:

usando el programa de matemática dinámica GeoGebra, para ello puedes abrir el fichero “Sistema de dos con dos CAS.ggb”.

$$\begin{cases} cx + 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Explora siguiendo las órdenes:

- Representa gráficamente en un sistema de coordenadas el sistema de ecuaciones.
- Al mover el deslizador c (parámetro) analiza qué ocurre con las soluciones del sistema.
- ¿Qué relación existe entre los coeficientes del sistema y las soluciones?
- Si el sistema tiene la forma general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

aduzca una relación entre los coeficientes del sistema y el número de soluciones.

Con esta primera situación se logró reactivar los conocimientos que tiene el estudiante de la enseñanza precedente sobre los sistemas de ecuaciones lineales. A continuación, se propusieron las siguientes actividades con el mismo medio.

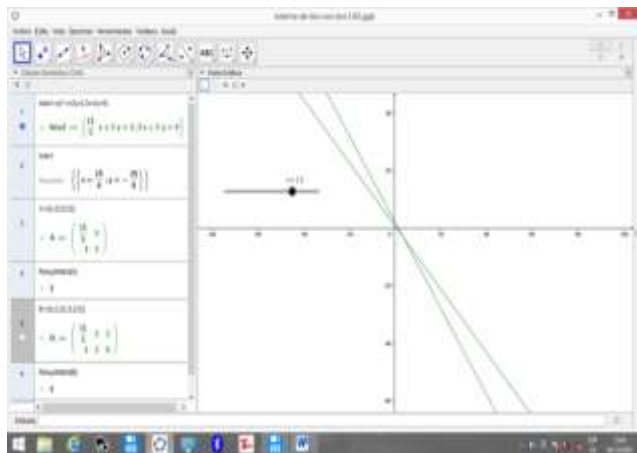
- Escribe la matriz del sistema dado y la matriz ampliada y determine el rango de dichas matrices.
- Explore con el deslizador y observe cómo varía el rango de estas matrices y el número de soluciones del sistema. A qué conclusión puedes arribar.

Al realizar estas actividades (Figura 4) y con la solución de las mismas se logró que los estudiantes encontraran la relación existente entre los conceptos de rango de una matriz y solución de un sistema de ecuaciones.

Situación de aprendizaje 2

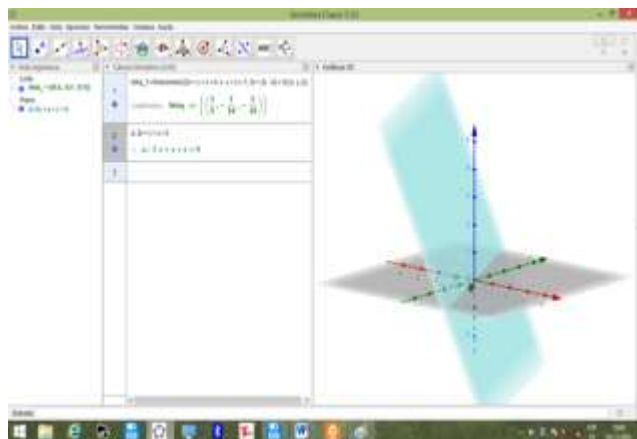
- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones con la vista CAS de GeoGebra.
- Representa la solución del sistema en un sistema de coordenadas.

Figura 4. Solución de un sistema de ecuaciones con deslizador con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Figura 5. Solución de un sistema de ecuaciones con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Evidentemente, la solución del sistema con la opción CAS es muy rápida, lo que permitió además al estudiante ver que es un punto en el espacio y analizar la relación entre el Álgebra y la Geometría Analítica. Se pudo orientar al estudiante que represente gráficamente en el sistema de coordenadas los planos que representan las ecuaciones del sistema de ecuaciones y pudo observar cómo cada plano del sistema pasa por el punto (Figura 5) que es la solución del sistema de ecuaciones. De esta forma se desarrolla en el estudiante su imaginación espacial y su pensamiento visual.

Situación de aprendizaje 3

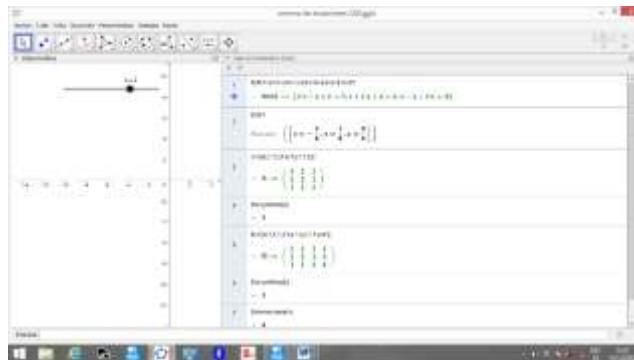
Investiga las soluciones del sistema utilizando el GeoGebra.

Explora siguiendo las órdenes:

- Abrir el fichero “sistema de ecuaciones CAS.ggb”.
- Resuelve el sistema con la opción CAS, escribe las matrices del sistema y ampliada, determina el rango de las matrices y moviendo el deslizador saca conclusiones sobre el número de soluciones y su relación con el rango de las matrices.
- Halla el determinante de la matriz del sistema y compara con las soluciones del sistema al mover el deslizador.

Como se puede observar en la figura 6, el estudiante al realizar las actividades previstas logró establecer relaciones entre el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada, lo que le permitió determinar la compatibilidad o no del sistema. En el inciso b) los alumnos lograron arribar a la conclusión que en sistemas de ecuaciones lineales en los que la matriz del sistema sea cuadrada y el determinante es distinto de cero el sistema es compatible determinado. Si el determinante es igual a cero puede ocurrir que el sistema sea compatible determinado o incompatible. Es decir, con la actividad se arribó a esta conjetura que luego fue demostrada con los conocimientos abordados en el Álgebra Lineal.

Figura 6. Solución de un sistema de ecuaciones usando un deslizador con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Otra de las opciones del CAS con las que se puede trabajar es con los vectores y a continuación se expondrá una situación de aprendizaje de cómo hacerlo con los estudiantes.

Situación de aprendizaje 4

Con el uso de la opción CAS de GeoGebra resuelva las siguientes actividades:

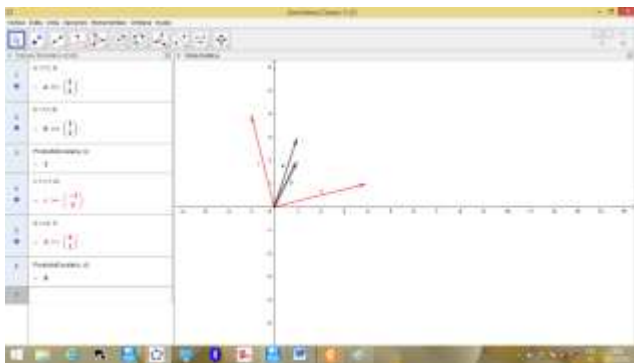
- Determine el producto escalar de los vectores $\vec{a} = (1; 3)$ y $\vec{b} = (1; 2)$. ¿Qué resultado obtenemos?
- Observa la representación de los vectores en el

sistema de coordenadas. ¿Qué relación de posición tienen?

- Determine el producto escalar de los vectores $\vec{c} = (-1; 4)$ y $\vec{d} = (4; 1)$.
- Analiza las mismas preguntas que los incisos b y c.
- ¿A qué conclusión podríamos arribar?

Con estas actividades el estudiante arribó a conclusiones sobre la perpendicularidad de los vectores y su relación con el producto escalar (Figura 7).

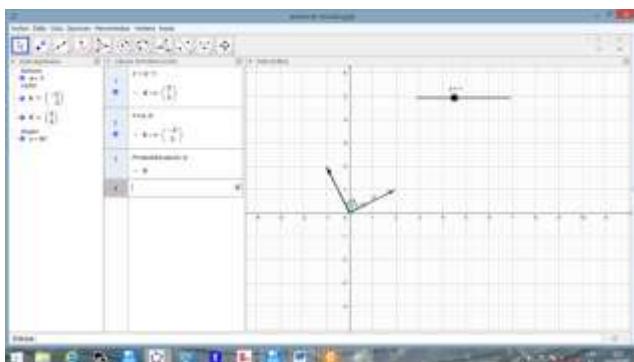
Figura 7. Producto escalar de vectores con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

Si no se arriba a la conclusión deseada es posible introducir un deslizador, tal como se muestra en la figura 8, y mover el mismo para que se pueda observar con más casos dónde solo es posible que los vectores sean perpendiculares.

Figura 8. Producto escalar de vectores usando deslizador con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

También es posible el trabajo con funciones en CAS usando los diferentes comandos que presenta el GeoGebra, a continuación se muestra una situación de aprendizaje.

Situación de aprendizaje 5

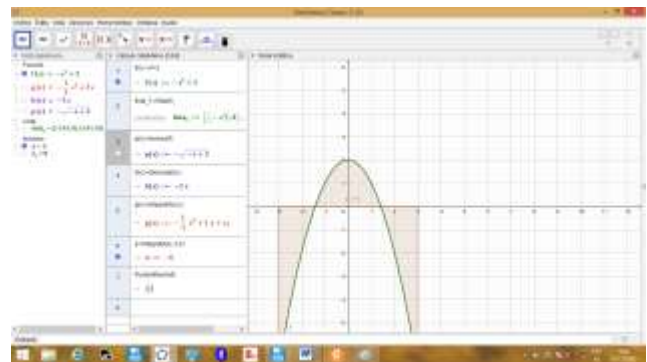
- Introduce en la vista CAS la función

$$f(x) = -x^2 + 2.$$

- Determina las raíces de la función con el comando *Raíces*.
- Determina la inversa de la función con el comando *Inversa*.
- Determina el punto de inflexión con el comando *PuntoInflexión*.
- Determina la derivada y la integral de la función con los comandos.
- Determina la integral de la función en el intervalo $[-3; 3]$.

Con esta situación de aprendizaje el estudiante pudo obtener los resultados pedidos con la opción CAS de manera muy sencilla lo que se comprobó luego con el trabajo algebraico. Además, dio la posibilidad de la representación gráfica de los aspectos pedidos como las funciones inversa, derivada e integral, lo que permitió hacer una interpretación de los resultados obtenidos. En la figura 9 se muestra la representación de la región de la integral determinada en el intervalo pedido.

Figura 9. Trabajo con funciones con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

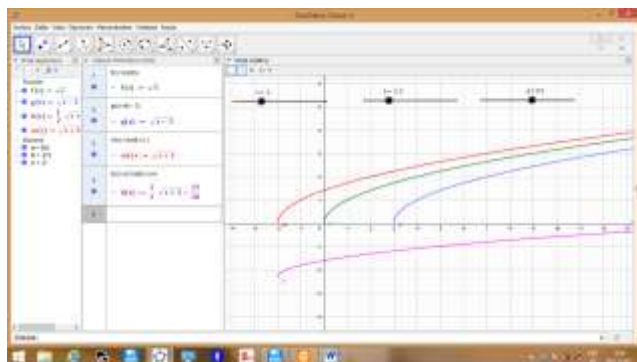
Situación de aprendizaje 6

- Grafica la función $f(x) = \sqrt{x}$. Calcula el dominio y la imagen de la función.
- Grafica la función $g(x) = f(x - 3)$.
- ¿Qué observas en el gráfico?
- ¿Cómo te parece que tendrá que ser la expresión analítica si queremos que dicha función se corra tres unidades a la izquierda?
- Introduce un deslizador c por 3. ¿Qué puedes

observar en el gráfico de f ? ¿Se altera dominio, imagen o ambas?

- f) Introduce los deslizadores a y b .
- g) Grafica la función $h(x) = a\sqrt{x-c} + b$. Asigna los siguientes valores a los parámetros a , b y c , $a=1$, $b=-2$ y $c=0$.
- h) Observa qué sucede con respecto al gráfico de la función.
- i) Determina las propiedades de la función que obtuviste.
- j) Experimenta con otra función.

Figura 10. Trabajo con funciones con CAS en GeoGebra



Fuente: Elaboración propia

El objetivo de la situación de aprendizaje es que los alumnos puedan generalizar la relación entre la traslación horizontal de una función y su expresión analítica y reflexionar si este tipo de movimientos altera el dominio y/o la imagen de la función original (Figura 10).

En esta situación de aprendizaje con respecto al trabajo en el aula, se diseñó para trabajar docente y grupo en su conjunto por ser de las primeras actividades. El profesor induce la traslación buscada a través de una sentencia analítica y luego, mediante preguntas, trata de fomentar otro tipo de traslación y una generalización.

La potencialidad de relacionar en forma simultánea los gráficos y las expresiones analíticas de las funciones y el deslizador que ayuda a observar varios movimientos a la vez, y el hecho que al cambiar la primera regla de designación por otra cambian todas las demás funciones en forma automática, son los fundamentos que se consideran por los cuales la situación amerita el uso de la tecnología.

El software permite ver los movimientos en una determinada función y luego cambiar esa función por otra y volver a analizarlos. A través de la visualización

y la experimentación el alumno tiene las herramientas para analizar qué sucede con el dominio y la imagen de la función original cuando se le transforma.

3.1. Resultados donde se aplicó la experiencia

Esta experiencia ha sido aplicada a los grupos de la Licenciatura en Educación Matemática y al grupo de Formación de Profesores de Secundaria Básica, en las diferentes disciplinas de la carrera de la Universidad de Holguín.

Se tomó como muestra el grupo de Formación de Profesores de Secundaria Básica, donde se pudo constatar que los siete estudiantes (el 100 %) lograron desarrollar habilidades en el trabajo con el GeoGebra y como resultado de las evaluaciones realizadas el 100% aprobó con calidad. Dos estudiantes culminaron con 5 puntos, lo que representó el 28,6% y el 71,4% obtuvo una calificación de cuatro puntos.

Luego de la aplicación del PMD GeoGebra los resultados se pueden catalogar de alentadores, pues los alumnos, en primer lugar, son capaces de aprender de manera fácil el trabajo con el GeoGebra y, en segundo lugar, resolvieron correctamente las situaciones de aprendizajes propuestas. En las evaluaciones realizadas, en las diferentes disciplinas, se puede observar la influencia positiva del software, lo que contribuyó en su preparación matemática.

De manera general, se pudo observar durante las actividades docentes desarrolladas el avance de los estudiantes tanto con el uso del GeoGebra como con la opción CAS, objetivo de este trabajo, así como en la formación de los conceptos abordados sobre las temáticas desarrolladas y expuesta en este trabajo, lo que demuestra la utilidad del uso del software no solo en la solución de tareas sino también en la representación y desarrollo del pensamiento espacial.

4. CONCLUSIONES

El objetivo del trabajo fue cumplido, pues a través de las situaciones de aprendizaje, se muestra cómo usar la opción CAS que brinda el PMD GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje de algunas de las disciplinas del Plan de Estudio E de la carrera Licenciatura en Educación Matemática del Departamento de Licenciatura en Matemática.

El GeoGebra no es la solución “mágica” a los problemas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el profesor debe ser capaz de sacarle el mayor provecho al uso del software en la impartición de sus clases y aprovechar las potencialidades de estos medios de enseñanza para dirigir de una manera más eficiente el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las situaciones de aprendizaje

propuestas son el resultado del estudio realizado con el PMD GeoGebra por parte de los autores y que han sido utilizados en diferentes cursos escolares.

Para el trabajo se siguieron los pasos propuestos en la estrategia didáctica, pues se tuvo en cuenta qué contenidos curriculares se pueden tratar con el GeoGebra y en particular con la opción CAS y que sea efectivo en el aprendizaje de los estudiantes, además de las condiciones del laboratorio de computación.

Para la elaboración de las situaciones de aprendizaje, se tuvo en cuenta las diferencias individuales de los mismos con el objetivo de que estas fueran lo más eficientes y efectivas posible y, por último, se llevó un registro individual donde se recogieron los avances y dificultades de cada estudiante. Se recomienda que el profesor deba combinar el uso de la tecnología con la metodología tradicional a lo largo de un curso, para ello debe decidir y escoger para cada unidad didáctica el tratamiento que considere más conveniente.

La experiencia se ha aplicado y se ha trabajado con otros contenidos relativos a las disciplinas que forman la Carrera, ya que, por medio del GeoGebra, se pueden priorizar manipulaciones dinámicas, diferentes a las presentadas en los libros que abordan este contenido, pues se presentan de manera estática. Este análisis proporcionó la obtención de elementos que permiten considerar la utilización del software en la elaboración y desarrollo de actividades destinadas a la comprensión del significado de los conceptos matemáticos.

El uso del software GeoGebra y la opción CAS tiene un impacto beneficioso y fortalecedor al ser implementado en el aula, ya que permite el desarrollo y consolidación de las habilidades relativas a cada contenido de los programas objeto de estudio, pues los estudiantes plantean conjeturas sobre las propiedades, para luego verificarlas. De esta manera, puede contribuir a mejorar la motivación por la Matemática y, de hecho, mejorar la enseñanza y aprendizaje de cada disciplina.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores del trabajo desean agradecer a los profesores de matemática del Departamento de Licenciatura en Matemática de las Universidad de Holguín, así como a los profesores y estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática, por las sugerencias ofrecidas durante la elaboración de la propuesta.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abar, C.; Cotic, N. (2015). *GeoGebra en la producción del conocimiento matemático*. Revista

Iberoamericana de Educación Matemática. Marzo, No. 41

Almouloud, A. S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora UFPR.

Barrena, E.; Falcón, R.; Ramírez, R.; Ríos, R. (2011). *Presentación y resolución dinámica de problemas mediante GeoGebra*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Marzo, No. 25.

Carrillo de Albornoz, A. (2013). *Cálculo Simbólico también es posible con GeoGebra*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Junio, No. 34.

Fabián, Y.; Rodríguez, Z. (2020). *El uso del GeoGebra en la asignatura de Matemática I*. Serie Científica de la Universidad de las Ciencias Informáticas. Vol. 13. Abril, No. 4.

Freyre, M.; Cavatorta, P. (2021). *Conjeturar y validar en un problema de geometría mediado por GeoGebra. ¿Qué construcciones se ponen en juego?* Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Agosto, No. 62.

Guachún, P.; Espadero, G. (2021). *El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de vectores: Una experiencia didáctica*. Revista de Matemática, Ensino e Cultura REMATEC, Belém/PA. Vol. 16. Enero – Abril, No. 37.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica*. Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia.

Paiva, A. C. P.; Alves, F. R. V. (2019). *Um estudo da Primeira Forma quadrática: Uma proposta de construção dinâmica*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Abril, No. 55.

Pimentel, A.; Vieira, F. (2019). *Um estudo da Primeira Forma quadrática: Uma proposta de construção dinâmica*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Abril, No. 55.

Pozas, D.; Alves, M. (2019). *Articulación entre Álgebra y Geometría utilizando GeoGebra: un Estudio Exploratorio con Estudiantes de Ingeniería*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Diciembre, No. 57.

Poveda, W.; García-Cuellar, D. (2021). *Estrategias asociadas al uso de GeoGebra en un contexto de resolución de problemas*. Revista de Matemática, Ensino e Cultura REMATEC, Belém/PA. Vol. 16. Enero – Abril, No. 37.

Williner, B.; Favieri, A.; Scorzo, R. (2020).
*Clasificación de tareas con software.
Propuesta usando la aplicación GeoGebra*

*para dispositivos móviles en carreras de
ingeniería.* Revista Iberoamericana de
Educación Matemática. Agosto, No. 59.